38. Докажите замкнутость и полноту в пространстве $L_2(-1,1)$ системы полиномов Лежандра.

Вот это вам выпало на теормаксе. Ну что, посмотрим, как такое доказывать? Давайте сперва посмотрим на то, что нам нужно доказать:

$$\left\| f(x) - \sum_{n=0}^{N(\varepsilon'')} C_n P_n(x) \right\| < \varepsilon,$$

Любую функцию f(x) можно разложить в ряд по полиномам Лежандра. Но в этом ряду будет бесконечно много слагаемых. Тут нам как раз это и предлагают доказать: для любого ε найдётся N(ε), что стоит нам взять N+1 слагаемых, так норма разности f(x) и конечного ряда из N+1 слагаемых будет меньше ε!

Большую помощь в доказательстве этой теоремы нам послужит теорема Вейерштрасса (одна из многих, он, как и Коши, обильно потрудились в матане). По-моему, она была в матане-3, но это не точно.

Её суть такова:

По теореме Вейерштрасса, для функции $g(x) \in C[-1,1]$ и любого $\varepsilon'' > 0$ найдется такая система коэффициентов $\{\tilde{C}_n\}$ и такая система полиномов $\{Q_n(x)\}$, где $Q_n(x)$ - полином степени n, а также такое $N = N(\varepsilon'')$, что

$$\max_{x \in [-1,1]} \left| g(x) - \sum_{n=0}^{N(\varepsilon'')} \tilde{C}_n Q_n(x) \right| < \varepsilon''$$

Она утверждает: любая функция, да, неплохо так раскладывается по полиномам, но вот по каким – мы вам не скажем. По каким-то. Это не полиномы Лежандра и не 1, x, x^2, x^3 (тогда был бы степенной ряд), просто какие-то полиномы, специально подобранные именно для g(x) (как сказали бы маркетологи, таргетированные для неё).

Ну вы же помните, что sin x, cos x и exp x прекрасно раскладываются в степенные ряды по функциям {1, x, x^2, x^3…}, эти ряды называются рядами Маклорена. Вы в матане-3 ещё вычисляли их радиус сходимости (для sin x, cos x и exp x он бесконечность, разложения Маклорены верны везде). А вот функция exp($-x^2$) не раскладывается в степенной ряд! Ну не подошла ей ряд полиномов {1, x, x^2, x^3…}! Так вот, теорема Вейерштрасса утверждает, что маркетологи способны подобрать ей таргетированный набор полином специально для того, чтобы она всё-таки по ней разложилась.

Итак, теорема Вейерштрасса выдала нам ряд из N+1 слагаемого

$$\sum_{n=0}^{N(\varepsilon'')} \tilde{C}_n Q_n(x),$$

Такой, что:

$$\left\| g(x) - \sum_{n=0}^{N(\varepsilon'')} \tilde{C}_n Q_n(x) \right\|^2 = \int_{-1}^{1} \left| g(x) - \sum_{n=0}^{N(\varepsilon'')} \tilde{C}_n Q_n(x) \right|^2 dx < 2(\varepsilon'')^2$$

Оказывается, что $\sum_{n=0}^{N(\varepsilon'')} \tilde{C}_n Q_n(x),$ мы вправе выразить как $\sum_{n=0}^{N(\varepsilon'')} C_n P_n(x)$. Ну мы там можем понараскрывать все скобочки в исходном ряду $\sum_{n=0}^{N(\varepsilon'')} \tilde{C}_n Q_n(x),$ и записать СЛАУ для C_n, которую в дальнейшем успешно решить. Тогда

$$\left\| g(x) - \sum_{n=0}^{N(\varepsilon'')} C_n P_n(x) \right\| < \sqrt{2}\varepsilon''.$$

Ну всё, ура, победа, говорим, что g(x) – это f(x) и пишем «ч.т.д.»? Не совсем. Теорема Вейерштрасса из матана-3, где рассматривалось пространство C[-1..1], а в утверждении теоремы 38-го вопроса ММФ фигурирует пространство Лебега L[-1..1], содержащую всякую ересь вроде дельта-функций.

К счастью, любую недофункцию f(x) из пространства L[-1..1] можно приблизить хорошей непрерывной функцией из пространства g(x).

Теперь мы применяем правило треугольника: f не сильно отличается от g, g не сильно отличается от ряда. Правильно подбираем эпсилоны и получаем то, что нужно доказать.